Esercizi

1. Le V.C. $X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,n}$ sono indipendenti e uniformi su $(0, 1/n)$. Dimostrare che la successione
$$Y_n = X_{n,1} + X_{n,2} + ... + X_{n,n}$$
converge in probabilità a 1/2.

   Sappiamo che la convergenza in media implica la convergenza in probabilità e che, per a costante deterministica,
$$l.i.m._{n\to+\infty} Y_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = a \\ lim_{n\to+\infty} Var(Y_n) = 0 \end{cases}$$

   In questo caso
$$E(Y_n) = E(X_{n,1}) + E(X_{n,2}) + ... + E(X_{n,n}) = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

   e, per l'indipendenza,
$$Var(Y_n) = Var(X_{n,1}) + Var(X_{n,2}) + ... + Var(X_{n,n}) = nVar(X_{n,1}) = n\frac{1}{12n^2} = \frac{1}{12n}$$

   da cui segue
$$lim_{n\to+\infty} Var(Y_n) = 0.$$

   Quindi Y_n converge a $\frac{1}{2}$ in media e, di conseguenza, anche in probabilità.

2. Si lancia una moneta 14400 volte. Si ha un successo nel lancio se esce T. Qual è la probabilità che il n. di successi differisca dal suo valore atteso per più di 228?
$$n = 14400 \qquad ; \qquad \tilde{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

   con
$$X_i = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ 0 & q = 1/2 \end{cases}$$

   Si ha che $\tilde{X}_n$ è distribuita binomiale con $n = 14400$ e $p = 1/2$.
$$E(\tilde{X}_n) = np = 14400 \cdot \frac{1}{2} = 7200 \qquad ; \qquad Var(\tilde{X}_n) = npq = 7200 \cdot \frac{1}{2} = 3600$$
$$P\left(\left|\tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n)\right| > 228\right) = P\left(\left|\frac{\tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n)}{\sqrt{var(\tilde{X}_n)}}\right| > \frac{228}{\sqrt{var(\tilde{X}_n)}}\right)$$
$$= 1 - P\left(-\frac{228}{60} < S_n \leq \frac{228}{60}\right) = 1 - [\Phi(3.8) - \Phi(-3.8)] = 2\,[1 - \Phi(3.8)] = 0.0002$$

Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P\left(\left|\tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n)\right| > 228\right)$$

$$= P\left(\left|\tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n)\right| > \underbrace{\frac{228}{60}}_{t} \cdot \underbrace{60}_{\sigma}\right) \leq \left(\frac{228}{60}\right)^{-2} = 0.069$$

La disuguaglianza di Chebishev fornisce un'approssimazione peggiore rispetto al calcolo diretto, comunque è già in grado di mostrare che è molto bassa la probabilità dell'evento che stiamo considerando.