Esercizi sulle V.C. congiunte

1. La coppia di V.C. X e Y ha densità congiunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   (a) Determinare k affinché f_{XY} sia una densità bivariata;

   (b) calcolare $P(X+Y < 1/2)$.

2. Le V.C. X e Y hanno densità congiunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cy^2 & 0 \leq x \leq 2 \ ; \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   (a) Determinare la costante c affinché f_{XY} sia una densità bivariata;

   (b) calcolare $P(X+Y > 2)$;

   (c) calcolare $P(Y < 1/2)$;

   (d) calcolare $P(X \leq 1)$.

3. (*Prima prova in itinere 06/05/08 PV*)
   Date due V.C. V e W identicamente distribuite con $V, W \sim N(1,2)$, $\sigma_{VW} = 1$, si considerino le seguenti alternative per la definizione di Z:

1. $Z = V - W$	2. $Z = V + W$	3. $Z = 2V - 2W$
4. $Z = 0.5V + 0.5W$	5. $Z = 2V - W$	6. $Z = 3V - W$

   Scrivere sopra i grafici della d.d.p. di Z il numero della scelta corretta.

4. (*Prima prova in itinere 23/04/04 PV*)
   Si considerino due V.C. X e Y, aventi la seguente ddp congiunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1+y}{4} & |x| \leq 2 \ ; \ -1 \leq y \leq 0 \\ \frac{1-y}{4} & |x| \leq 2 \ ; \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   (Si noti che la ddp NON uniforme)
   Si definiscano inoltre

$$V = 2Y \qquad ; \qquad W = \frac{X}{2}$$

   Scrivere

1. $f_X(x)$	2. $f_{Y\|X}(y\|X=0)$
3. $f_V(v)$	4. $f_W(w)$

5. (*Prova dell'08/05/07 PV*)
   Date due V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, $Var[X] = 3$, $Var[Y] = 4$, si considerino le seguenti alternative per la definizione di σ_{XY}:

1. $\sigma_{XY} = 0$	2. $\sigma_{XY} = 1$	3. $\sigma_{XY} = 3$
4. $\sigma_{XY} = -1$	5. $\sigma_{XY} = -2$	6. $\sigma_{XY} = -3$

Avendo definito $Z = X + Y$, scrivere sopra i grafici della d.d.p. $f_Z(z)$, il numero della scelta corretta.
NOTA: la somma di V.C. congiuntamente gaussiane è anchessa gaussiana.

6. (*Prova del 06/05/08 PV*)
Date due V.C. U e V i.i.d. uniformi in $[0,1]$ e $X \sim N(0,1)$, si considerino le seguenti alternative per la definizione di Y:

$$\begin{array}{lll} a.\ Y = 2U & b.\ Y = U - V & c.\ Y = 0.75X \\ d.\ Y = U + V & e.\ Y = 2U - 1 & f.\ Y = 1 + 0.75X \end{array}$$

Scrivere sopra i grafici di dispersione di Y la lettera della scelta corretta.

7. (*Prima prova in itinere 29/04/08 MN*)
Date due V.C. V e W gaussiane standard indipendenti, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y :

$$\begin{array}{llllll} 1. & \begin{array}{l} X = V + 2W \\ Y = -2V - W \end{array} & 2. & \begin{array}{l} X = V \\ Y = 2W \end{array} & 3. & \begin{array}{l} X = 2V \\ Y = 2W \end{array} \\ \\ 4. & \begin{array}{l} X = V + W \\ Y = 4W \end{array} & 5. & \begin{array}{l} X = V - W \\ Y = 4W \end{array} & 6. & \begin{array}{l} X = V - W \\ Y = -V + W \end{array} \end{array}$$

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta.

8. (*Prova del 26/06/02 MN*)
Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

$$\begin{array}{llllll} 1. & \begin{array}{l} X = V - W \\ Y = W - V \end{array} & 2. & \begin{array}{l} X = V \\ Y = V + W \end{array} & 3. & \begin{array}{l} X = V - W \\ Y = V + W \end{array} \\ \\ 4. & \begin{array}{l} X = 2V - W \\ Y = V + 2W \end{array} & 5. & \begin{array}{l} X = 2V \\ Y = W \end{array} & 6. & \begin{array}{l} X = V - W \\ Y = 2V - 2W \end{array} \end{array}$$

Calcolare la varianza di X, di Y e la covarianza in tutti i casi.

9. (*Prova del 06/09/02*)
Siano X e Y due V.C. che rappresentano le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel triangolo con vertici in (0,0), (0,1) e (1,0).
   (a) Dire, motivando la risposta, se X e Y sono incorrelate;
   (b) dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti;
   (c) ricavare la d.d.p. della V.C. $W = X + Y$.

10. Siano X e Y due V.C. congiunte con funzione di distribuzione

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ o } y < 0 \\ 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \end{cases}$$

Dire se X e Y sono indipendenti.

11. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

    (a) Siano X e Y due V.C. congiunte. Allora $P(X > a, Y > b) = F_X(a) + F_Y(b) - F_{XY}(a, b)$.

    (b) Sia $V = \alpha X - a$ e $W = \beta Y - b$. Allora $cov(V, W) = cov(X, Y)$ e $r_{VW} = r_{XY}$.

    (c) $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ se e solo se X e Y sono indipendenti.

    (d) $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ se e solo se X e Y sono incorrelate.

    (e) $P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_1)$.

    (f) $E[g(X) + h(Y)] = E[g(X)] + E[h(Y)]$ se e solo se X e Y sono indipendenti.

    (g) Le coordinate X e Y di un punto scelto in modo equiprobabile nel rettangolo $0 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1$ sono V.C. indipendenti.

    (h) Se U e V sono V.C. indipendenti, entrambe uniformi in $[0, 1]$, allora $Y = U - V$ ha una d.d.p. a triangolo in $[-1, 1]$.

    (i) Date due V.C. X e Y, si definiscano $V = aX$ e $W = bY$. Allora, $r_{VW} = r_{XY}$.

    (j) Date due V.C. X e Y, con $Var(X) \neq 0$ e $Var(Y) \neq 0$, risulta sempre $Var(X+Y) \neq 0$.

    (k) Se $E(X) > 0$ e $E(Y) < 0$, allora $r_{XY} \leq 0$.

    (l) Essendo X e Y due V.C. congiunte, si definiscano $V = 5 + X$, $W = 6 + Y$, allora $r_{VW} = r_{XY}$.